- lineární transformace $f: V \to V$
- matice lin. transformace vzhledem k bázi
- vlastní vektor, vlastní číslo

  $\det(A - \lambda E) = 0$ ... vl. čísla

  $(A - \lambda_1 E)x = 0$ ... vl. vektory
- diagonalizovatelná matice
- $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

PRVNÍ ROZKLAD LIN. TRANSFORMACE

$f: V \to V$ lin. transformace

$U \subseteq V$ podprostor je INVARIANTNÍ vzhledem k f, když $\forall u \in U$ platí $f(u) \in U$ $\big(f(U) \subseteq U\big)$.

<u>Tvrzení</u> $V = U_1 \dot{+} U_2$, kde U_1, U_2 jsou invariantní $e_1, \dots, e_m$ – báze U_1, $e_{m+1}, \dots, e_n$ báze U_2. Pak $e_1, \dots, e_n$ je báze V a matice lin. tr. f vzhledem k $e_1, \dots, e_n$ je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \\ \vdots & & \\ \cdot & & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$f: V \to V$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$f^0 = id_V$, $f^1 = f$, $\dots$, $f^k = f \circ f^{k-1}$

$f^2(v) = f(f(v))$

$p \in P[x]$, $p = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$f: V \to V$

$p(f): V \to V$, $p(f) = a_m f^m + \dots + a_1 f + a_0 id$

$A \dots$ matice, $p(A) = a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E$

$p \in P[x]$ nenulový se nazývá ANULUJÍCÍ polynom čtvercové matice A (lin. tr. f), jestliže $p(A) = O$ ($p(f) = 0$).

Tvrzení Buď q anulující polynom lin. tr. $f: V \to V$. Nechť existuje rozklad $q = q_1 q_2 \dots q_m$, kde $q_1 - q_m$ jsou po dvou nesoudělné (pro $i \neq j$ je $D(q_i, q_j) = 1$) Označme $U_i = Ker\, q_i(f)$, kde $q_i(f): V \to V$

Pak
1) $\forall i$ je U_i invariantní podprostor.
2) $V = U_1 \dotplus \dots \dotplus U_m$.
3) q_i je anulující polynom $f|_{U_i}$ $\forall i$.

Hamilton-Cayleyova věta Charakteristický polynom čtvercové matice nad P je jejím anulujícím polynomem.

Def. Anulující polynom se nazývá MINIMÁLNÍ, je-li normovaný a nejmenšího stupně ze všech anulujících polynomů.

Tvrzení Každý anulující polynom je dělitelný minimálním polynomem.

<u>Příklad</u> $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ -6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 & 2 \\ -6 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(9-\lambda)^2 + 18\cdot(9-\lambda) =$$

$$= (9-\lambda)\cdot(-\lambda\cdot(9-\lambda)+18) = (9-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$$

$$\lambda_1 = 9 \quad \lambda_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \Big\langle\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(A - 3E)x = 0$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$x_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) \ldots \; U_1 = \left[\left[\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right]\right]$$

. . .

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$